Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III**, 6.

DIE ELEMENTARFLÄCHE DRITTER ORDNUNG MIT VIER KONISCHEN DOPPELPUNKTEN

VON

C. JUEL

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1920

Pris: Kr. 0.50.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 % billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III,** 6.

DIE ELEMENTARFLÄCHE DRITTER ORDNUNG MIT VIER KONISCHEN DOPPELPUNKTEN

VON

C. JUEL

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1920

Eine Elementarfläche ist von unendlich vielen Variablen abhängig; es hat deshalb seine Schwierigkeiten, Sätze über spezielle Flächen aus Sätzen über allgemeine Flächen derselben Ordnung abzuleiten; man ist wenigstens bis auf weiteres genötigt, independente Beweise zu führen. Im folgenden werde ich die Fläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten behandeln, wobei sich ergibt, dass sich die independent geführten Beweise viel einfacher stellen als im allgemeinen Fall.

Wir setzen voraus, dass die Fläche eine Elementarfläche ist, dass sie also von jeder Ebene in einer Kurve dritter Ordnung ohne Winkelpunkte geschnitten wird, wobei selbstverständlich nicht ausgeschlossen ist, dass sie zerfällt. Wir setzen ferner voraus, dass die Fläche keine Regelfläche ist; dann kann sie auch keine Doppelgerade enthalten, denn jede durch diese gehende Ebene würde die Fläche in noch einer Geraden schneiden.

Ein Doppelpunkt O einer Fläche soll ein solcher Punkt sein, in dem jede durch A gehende Gerade die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet. Ist die Fläche dritter Ordnung, wird eine durch O gehende Gerade entweder die Fläche in O berühren, oder sie in einem ausserhalb O liegenden Punkt schneiden, oder auch auf der Fläche liegen.

Man bemerke nun erstens, dass eine Fläche F^{III} höchstens vier getrennte konische Doppelpunkte haben kann.

Es seien O_1, O_2, O_3, O_4 vier Doppelpunkte der Fläche. Jede Verbindungsgerade zweier dieser Punkte liegt auf der Fläche. Die Ebene $\alpha_4 = (O_1 O_2 O_3)$ schneidet also in den drei Geraden O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3 und kann keinen Punkt ausserhalb dieser Geraden mit der Fläche gemein haben; insbesondere kann kein neuer Doppelpunkt in einer Seitenfläche des Tetraeders $(O_1O_2O_3) = \alpha_4$ liegen. Wäre nun O_5 ein neuer Doppelpunkt, dann würde die Ebene α_4 ausser den drei genannten Geraden noch den Schnittpunkt mit der Geraden O_4O_5 mit der Fläche gemein haben, was ausgeschlossen ist.

Das Tetraeder $O_1O_2O_3O_4$ ist ein Haupttetraeder mit den Seitenflächen α_1, α_2, α_3, α_4, wo $\alpha_1 = (O_2O_3O_4)$ usw. In jedem anderen Punkt als O_1, O_2, O_3, O_4 liegen die Tangenten in einer Ebene. (Voraussetzung).

Jede durch einen Doppelpunkt O_r gehende Ebene schneidet in einer Elementarkurve dritter Ordnung, die in O_r einen eigentlichen oder uneigentlichen Doppelpunkt hat. Die durch O_r gehenden Ebenen, die in O_r einen eigentlichen Doppelpunkt haben, werden in der stetigen Fläche eine stetige Reihe bilden, und deshalb füllen die in O_r berührenden Geraden eine Kegelfläche zweiter Ordnung $(\varkappa_r)$.

Eine beliebige durch O_1O_2 gehende Ebene μ schneidet die Fläche noch in einer Kurve zweiter Ordnung λ^2, die durch O_1, O_2 und $(\mu \cdot O_3O_4)$ geht.[1] Die Tangenten an λ^2 in O_1 und O_2 sind die im allgemeinen von O_1O_2 verschiedenen Schnittgeraden von μ mit den Kegelflächen $(\varkappa_1)$ und $(\varkappa_2)$. Nehmen wir nun eine durch O_1O_2 gehende Ebene μ, die (λ_1) der Geraden O_1O_2 entlang berührt. Die Kurve λ^2 wird dann durch O_1 und O_2 gehen und noch in O_1 die Gerade O_1O_2 berühren, d. h. λ^2 wird sich in O_1O_2 und noch eine

[1] Auch das eventuell zerfallene Gebilde nenne ich hier eine Kurve.

Gerade zerlegen. Aber dann muss die hervorgehobene Ebene μ auch $(\varkappa_2)$ berühren d. h.:

Je zwei der in den Doppelpunkten berührenden Kegelflächen, berühren längs der Verbindungsgeraden der Scheitel eine und dieselbe Ebene μ.

Es soll nun eine unserer Aufgaben sein, die neuen d. h. die von den Kanten des Haupttetraeders verschiedenen Geraden der Fläche zu bestimmen. Dass neue Gerade vorhanden sind, wissen wir, denn in jeder der im vorigen Satz genannten Ebenen μ liegt eine neue Gerade. Die 6 Ebenen μ brauchen aber nicht 6 neue Gerade zu geben; aber es ist ersichtlich, dass die Fläche mehr als eine neue Gerade haben muss, denn eine gemeinsame Gerade aller Ebenen μ würde alle 6 Tetraederkanten schneiden, was unmöglich ist.

Weil keine neue Gerade eine Seitenfläche des Haupttetraeders ausserhalb der Seitenkanten schneiden darf, muss jede neue Gerade zwei Gegenkanten des Tetraeders schneiden.

Es werde O_1O_2 von einer neuen Geraden f geschnitten. Die Ebene $(O_1O_2 \cdot f)$ muss dann eine der im vorigen Satz genannten Ebenen μ sein. Jede andere durch O_1O_2 gehende Ebene schneidet nämlich ausser in O_1O_2 noch in einer durch O_1 und O_2 gehende Kurve λ zweiter Ordnung, die in O_1 und in O_2 Gerade a_1 und a_2 berühren, welche von O_1O_2 verschieden sind. Weil aber einer obigen Bemerkung zufolge λ nicht in a_1 und a_2 ausarten kann, wird λ nur dann eine neue Gerade enthalten können, wenn sie in einer der oben genannten Ebenen μ liegt.

Jede Kante des Haupttetraeders wird also von einer und nur einer neuen Geraden geschnitten, und weil Gegenkanten gleichzeitig geschnitten werden, hat die Fläche also drei neue Gerade. Sind f und g zwei dieser Geraden, die einander nicht schneidel, kann man durch einen beliebigen Doppelpunkt eine (nicht mit einer Tetraederkante zusammenfallende) Gerade bestimmen, welche f und g in getrennten Punkten schneidet; weil dies ausgeschlossen ist, müssen die drei Geraden in einer Ebene liegen. Man hat also:

Eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten hat ausser den Verbindungslinien dieser Punkte drei andere Gerade. Diese liegen in einer Ebene und sind die Diagonalen in dem Vierseite, in welchem ihre Ebene von den Seitenebenen des Haupttetraeders geschnitten wird.

Wir wollen nun den geometrischen Umriss (höchstens vierter Ordnung) unserer Fläche F^{III} auf einer Ebene π aus einem Punkt der Fläche zu bestimmen suchen. Es braucht dieser Umriss U nicht aus jedem Punkt P der Fläche vorhanden zu sein, sicher aber doch, wenn P ein (nicht auf einer Geraden der Fläche liegender) hyperbolischer Punkt ist. Legt man nämlich durch eine Haupttangente in P eine beliebige Schnittebene, wird P ein Inflexionspunkt der Schnittkurve sein, und aus P gehen dann Tangenten an dieselbe. Hyperbolische Punkte sind vorhanden, weil sich Inflexionspunkte auf jeder nicht durch eine Gerade der Fläche gehenden ebenen Schnittkurve vorfinden. Wir nehmen im Folgenden bis auf weiter es noch an, dass P nicht auf einer Geraden der Fläche liegt. Wir bemerken zuerst, dass U keine Spitzen haben kann, denn eine Haupttangente kann nur den Berührungspunkt mit der Fläche gemein haben. Ebensowenig kann der Umriss ausserhalb der Bilder $O_1' \dots O_4'$ der Doppelpunkte der Fläche andere Doppelpunkte haben. Dagegen können selbstverständlich

$O_1' \ldots O_4'$ eigentliche Doppelpunkte sein. Es wird O_r' ein eigentlicher Doppelpunkt sein, wenn P ausserhalb der in O_r berührenden Kegelfläche $(\varkappa_r)$ liegt. Liegt P innerhalb derselben, gehört O_r' gar nicht dem Umriss an, soll aber als ein uneigentlicher Doppelpunkt bezeichnet werden, indem eine durch O_r' gehende und in π liegende Gerade höchstens zwei Punkte mit U gemein haben kann; aus einem Punkt P einer ebenen Kurve dritter Ordnung mit einem eigentlischen oder uneigentlischen Doppelpunt, gehen nämlich höchstens zwei ausserhalb P berührende Tangenten.

Wir bemerken noch, dass die Verbindungsgerade zweier Punkte O' z. B. O_r' O_s' ausser möglicherweise diesen Punkten keinen anderen Punkt mit U gemein haben kann. Die Ebene PO_rO_s schneidet nämlich ausser in O_rO_s nur noch in einer durch P gehenden Kurve zweiter Ordnung.

Endlich bemerken wir, dass aus O_r' keine ausserhalb O_r' berührende Tangente an U geben kann, denn sonst würde auch aus O_r eine ausserhalb O_r berührende Tangente an F^{III} gehen, was ausgeschlossen ist.

Man kann nun beweisen:

Der Umriss der Fläche aus einem Punkt der Fläche hat immer die Bilder der vier Doppelpunkte als eigentliche Doppelpunkte.

Nehmen wir an, O_r' sei ein eigentlicher Doppelpunkt. Wir können dann beweisen:

1) Eine Tangente an U in O'_r kann nicht durch einen anderen Punkt O' gehen,

2) Eine Tangente an U in O'_r kann dort nicht eine Wendetangente sein.

Die Tangenten in O'_r sind nämlich die Spuren der zwei durch P gehenden Ebenen ν, welche $(\varkappa_r)$ berühren. Diese können nur dann durch einen anderen Punkt O' gehen, wenn sie mit einer der früher genannten Ebenen μ zusammenfallen; aber dann müsste P gegen die Voraussetzung in einer Geraden der Fläche liegen.

Eine der oben genannten Ebenen ν kann nicht π in einer Wendetangente t schneiden, denn ν schneidet F^{III} in einer Kurve δ dritter Ordnung mit Spitze in O_r, und aus P geht an δ eine Tangente, d. h. t würde ausserhalb O_r' noch einen Punkt mit U gemein haben, was aber nicht möglich ist, weil, wenn t eine Wendetangente in O_r' wäre, da schon vier Schnittpunkte mit U vereinigt sind.

Nehmen wir nun an, keine von den Punkten O_r' und O_s' seien eigentliche Doppelpunkte. Weil aus O_r' keine Tangenten an U gehen, werden alle durch O_r' gehenden und in π liegenden Geraden gleich viele Punkte mit U gemein haben. Die Gerade O_rO_s hat aber keine Punkte mit U gemein, d. h. die Kurve U könnte in diesem Fall garnicht vorhanden sein.

Ganz derselbe Schluss gilt noch, wenn O_r' aber nicht O'_s ein eigentlicher Doppelpunkt ist. Drehen wir nämlich in π eine Gerade l um O'_r von einer in O'_r berührenden Geraden t ausgehend. Weil t keine Wendetangente ist und aus O_r keine Tangenten an U gehen, wird jede Gerade l in gleichvielen Punkten schneiden, — aber $O_r'O_s'$ hat ausserhalb O_r' keinen Punkt mit U gemein, wobei zu bemerken ist, dass kein neuer Schnittpunkt von U mit l in O_r' fallen kann, wenn l mit $O'_rO'_s$ zusammenfällt, weil die letztgenannte Gerade keine Tangente in O'_r ist.

Aus alledem folgt, dass sämtliche Punkte O_1', O_2', O_3', O_4' eigentliche Doppelpunkte des Umrisses sein müssen.

Jetzt kann man den Hauptsatz beweisen:

Jeder (existierende) Umriss der Fläche aus einem Punkt der Fläche, der nicht in einer Geraden der Fläche liegt, ist aus zwei Ovalen zusammengesetzt.

Erstens sieht man, dass U nicht aus einem einzelnen geschlossenen Zweig bestehen kann. Es folgt dies aus einem Satz, den ich früher bewiesen habe,[1] nämlich dass ein Zweig vierter Ordnung mit Doppelpunkten, aus denen keine Tangenten des Zweiges ausgehen (die nicht in den betreffenden Doppelpunkten berühren) und deren Doppelpunktstangenten nicht Wendetangenten sind, notwendigerweise eine unpaare Zahl von Doppelpunkten haben muss — während hier vier nachgewiesen worden sind.

Der Umriss U ist also aus mehreren Zweigen zusammengesetzt. Diese müssen alle paar sein. Nehmen wir nämlich an, Zweige α, β, ... von U seien unpaarer also dritter Ordnung. Diese können sich nur in den Punkten O' schneiden. Weil aber aus keinem Punkt O' Tangenten gehen, die nicht in demselben Punkt berühren. müsste jede der Kurven α, β ... in einem der Punkte O' einen Doppelpunkt haben, was unmöglich ist, weil die Verbindungsgerade zweier Punkte O' dann mehr als vier Punkte mit U gemein haben würde.

Es sei nun α ein paarer Zweig von U, und nehmen wir an, diese hat in O_1' einen Doppelpunkt. Weil aus O_1' keine ausserhalb O_1' berührende Tangente geht (eine in O_1' berührende Wendetangente mit eingeschlossen), hat jede in π liegende durch O_1' gehende und nicht in diesem Punkt berührende Gerade ausser O_1' zwei Punkte mit α gemein. Es würde also U in diesem Falle keinen anderen Zweig als α enthalten können, was dem Obigen widerspricht. Die paaren Zweige sind also doppelpunktfrei.

[1] Siehe »Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung«; Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter. 7. XI. 2. 1914. pg. 149.

Durch einen Doppelpunkt z. B. O' gehen also zwei Zweige, und jede durch O' gehende in π liegende und dort nicht berührende Gerade schneidet ausser zweimal in O_1' jeden dieser Zweige noch einmal. Es kann deshalb U keinen dritten Zweig enthalten, und derselbe muss aus zwei Zweigen zusammengesetzt sein, die einander in $O_1' O_2' O_3' O_4'$ schneiden.

Der Umriss U unserer Fläche hat als Doppeltangente sicher die Spur S der in P berührenden Ebene, weil P ein nicht auf einer Geraden der Fläche liegender hyperbolischer Punkt ist. Als weitere Doppeltangenten können noch die Bilder der drei neuen Geraden der Fläche auftreten, aber andere sind jedenfalls nicht möglich.

Zwei paare Zweige einer Kurve vierter Ordnung, die einander in vier Punkten schneiden, haben nun vier oder auch keine Tangenten miteinander gemein.[1] Wenn also S keine α und β gemeinsame Tangente wäre, sondern z. B. α zweimal berührte, dann würden α und β keine Tangenten miteinander gemein haben können. Das ist aber unmöglich. Haben nämlich α und β keine Tangenten miteinander gemein, dann muss, weil sie auch ohne Spitzen sind, jede Tangente an α den anderen Zweig β in gleichvielen Punkten schneiden, und hier in zwei, wie man es sieht, wenn man die Tangente an α in einem Schnittpunkt mit β betrachtet. Es kann deshalb α und ebenso β keine Doppeltangente haben, weil eine solche mehr als vier Punkte mit $\alpha + \beta$ gemein haben würde.

Es hat also U keine andere Doppeltangenten als die vier α und β gemeinsamen Tangenten. Jeder der Zweige α und β ist deshalb entweder vierter oder auch zweiter Ordnung ohne Spitzen, ohne Doppelpunkte und ohne Doppeltangenten. Eine solche Kurve muss aber zweiter Ordnung sein.

[1] Siehe die vorherstende Note Seite 9.

Wir wollen noch den Fall in Betracht ziehen, dass P auf einer der neuen Geraden der Fläche liegt. Der früheren Bestimmung einer solchen Geraden f zufolge schneidet dieselbe zwei Gegenkanten des Haupttetraeders, und die Ebenen, welche f mit diesen Kanten verbinden, sind zwei der früheren Ebenen μ, welche die Fläche den zwei genannten Kanten entlang berühren.

Der Umriss besteht also in diesem Falle aus zwei Geraden und eventuel noch einer Kurve zweiter Ordnung.

Wir wollen noch beweisen, dass ein Umriss nicht vorhanden ist, wenn das Projektionscentrum P in einem elliptischen Punkt der Fläche gewählt wird.

Dass P ein hyperbolischer Punkt ist, wurde nämlich nur im letzten Teil des Beweises benutzt. Es gilt ganz allgemein, dass wenn der Umriss aus einem Punkt der Fläche vorhanden ist, dann muss derselbe aus zwei sich in den Punkten $O_1' \dots O_4'$ schneidenden Zweigen zusammengesetzt sein. Wenn aber P ein elliptischer Punkt ist, dann ist die Spur S der in P berührenden Ebene keine Doppeltangente von U. Die Zweige α und β können dann keine Tangenten miteinander gemein haben. Hieraus folgt, wie schon oben bemerkt, dass jede Tangente von α zwei Punkte mit β, und jede Tangente von β zwei Punkte mit α gemein haben muss. Aber daraus folgt, dass α und β keine Doppeltangenten haben können, und ausserdem noch, dass jede Gerade l in der Ebene von U wenigstens zwei Punkte mit $U = \alpha + \beta$ gemein hat; eine Änderung in der Zahl der Schnittpunkte von l mit U kann nämlich nur beim

Überschreiten einer Tangente von U stattfinden, indem α und β ohne Spitzen sind.

Legen wir nun durch P und eine neue Gerade f der Fläche eine Ebene. Diese schneidet F^{III} ausser in f noch in einer Kurve zweiter Ordnung; wenn diese zwei Punkte mit f gemein hat, dann ist das Bild f' von f eine Doppeltangente des Umrisses; sonst hat f' keinen Punkt mit dem Umriss gemein. Hier ist aber dem Obigen zufolge f' keine Doppeltangente, und f' hat also keinen Punkt mit U gemein. Dies gibt aber einen Widerspruch, so dass ein Umriss aus einem elliptischen Punkt garnicht existieren kann.

Es ist jetzt möglich, aus der Definition der Fläche allein sich ein typisches Bild der Fläche vorzustellen. Man kann nämlich durch eine kollineare Transformation immer die Ebene, welche die neuen Geraden der Fläche enthält, ins Unendliche projicieren. Dann schneidet, wie leicht zu sehen, jede Kegelfläche ($\varkappa$) diejenige Seitenfläche des Haupttetraeders, welche nicht durch den Scheitel des Kegels geht, in einer Ellipse. Aus Punkten der Fläche, welche innerhalb des Tetraeders liegen, können deshalb keine berührenden Ebenen an die Kegelflächen ($\varkappa$) gehen, und diese Punkte müssen deshalb alle elliptisch sein. Dagegen werden alle Punkte der Fläche ausserhalb des Tetraeders hyperbolisch sein, und die Fläche erstreckt sich ins Unendliche.

Die Fläche hat keine anderen parabolischen Punkte als die Doppelpunkte. Weil nämlich kein Umriss aus einem Punkt der Fläche Wendepunkte hat, wird überhaupt kein Umriss Wendepunkte haben können.

Forelagt paa Mødet den 27. Febr. 1920.
Færdig fra Trykkeriet den 27. Nov. 1920.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

1. BIND (Kr. 8,80):

		Kr. Ø.
1.	Christiansen, C.: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VI. 1917	0.25
2.	Knudsen, Martin: Fordampning fra Krystaloverflader. 1917.	0.25
3.	Brønsted, J. N., og Petersen, Agnes: Undersøgelser over Omdannelsen af reciproke Saltpar, samt over Benzidin-Benzidinsulfat-Ligevægten. Affinitetsstudier XI. 1917	0.60
4.	Andersen, A. F.: Sur la multiplication de séries absolument convergentes par des séries sommables par la méthode de Cesàro. 1918	0.90
5.	Brønsted, J. N.: En thermodynamisk Relation mellem Blandingsaffiniteterne i delvis mættede Opløsninger og dens Anvendelse til Affinitetsbestemmelse. Affinitetsstudier XII. 1918	0.90
6.	Nielsen, Niels: Recherches sur les polynomes d'Hermite. 1918	1.75
7.	Pedersen, P. O.: Om Townsends Teori for Stødionisation. 1918	0.30
8.	Køhl, Torvald: Stjerneskud over Danmark og nærmeste Omlande 1913—1917. 1918	0.30
9.	Tscherning, M.: Moyens de contrôle de verres de lunettes et de systèmes optiques en général. 1918	0.45
10.	Tscherning, M.: Une échelle de clarté, et remarques sur la vision à faible éclairage. 1918	0.70
11.	Pedersen, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part I. A preliminary investigation. 1919	1.75
12.	Krogh, August: The Composition of the Atmosphere. An account of preliminary investigations and a programme. 1919	0.45
13.	Hartmann, Jul.: Om en ny Metode til Frembringelse af Lydsvingninger. 1919	1.25
14.	Christiansen, J. A.: On the Reaction between Hydrogen and Bromine. 1919	0.65
15	Tscherning, M.: La théorie de Gauss appliquée à la réfraction par incidence oblique. 1919	1.25

2. BIND (Kr. 12,95):

		Kr. Ø.
1.	WINTHER, CHR.: The photochemical Decomposition of Hydrogen Peroxide. 1920	0.60
2.	WINTHER, CHR.: The photochemical Oxidation af Hydriodic Acid. 1920	0.90
3.	WINTHER, CHR.: The photochemical Efficiency of the absorbed Radiation. 1920	1.15
4.	ZEUTHEN, H. G.: Sur l'origine de l'algèbre. 1919	2.25
5.	MITTAG-LEFFLER, G.: Talet. Inledning till teorien för analytiska funktioner. 1920	2.00
6.	CHRISTIANSEN, C. og CHRISTIANSEN, JOHANNE: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VII. 1919	1.15
7.	CHRISTIANSEN, C.: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VIII. 1919	0.60
8.	HARTMANN, JUL.: Overfladespændingens Indflydelse ved Udstrømning af en Vædske i Straaleform. 1919	1.10
9.	FAURHOLT, CARL: Über den Nachweis von Chlorid neben Bromid. 1919	0.50
10.	BRØNSTED, J. N.: On the Solubility of Salts in Salt Solutions. Studies on Solubility I. 1919	1.50
11.	HOLST, HELGE: Die kausale Relativitätsforderung und Einsteins Relativitätstheorie. 1919	2.00
12.	NIELSEN, NIELS: Recherches sur les Polynomes de Stirling. 1920.	3.50

3. BIND:

1.	THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2.	PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920	1.15
3.	WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4.	WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5.	JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.	0.50
6.	JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920.	0.50
7.	RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8.	MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9.	BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920.	0.75